



دوشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۲۵

دفترچه پاسخ

شمارش، بدون شمردن +
آمار و احتمال
(فصل ۶ و ۷ دهم + ۷ یازدهم + ۷ دوازدهم)

دوبینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی ریاضی

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیعزاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	کاظم اجاللی	فرشاد حسنزاده ارسلان حسنونند - سجاد احمدی

مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله + توان های گویا + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن و آمار و احتمال
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم

۵۵ روز جمع بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دانش آموزان عزیز ماز ❤️

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

تو این بخش می‌خوایم به بررسی و تحلیل دو موضوع مهم بپردازیم که بیشتر از همه بخش‌های ریاضی تو زندگیمون کاربرد داره و قابل درکه.

۱) آمار :

تا حالا شده آمار یکیو بگیرین؟؟!!

به علم جمع‌آوری اطلاعات، تجزیه و تحلیل اونا و نحوه ارائه این تحلیل‌ها، علم آمار میگیم.

ابتدا باید تعاریف اولیه مانند جامعه، سرشماری، نمونه، انواع متغیر و ... رو یاد بگیریم. بعد به تحلیل داده‌ها به کمک ابزارهایی مثل میان، میانگین، دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات می‌پردازیم.

۲) احتمالات :

روش‌های پیش‌بینی و تحلیل حالت‌های ممکن قبل از انجام یه پدیده رو تو یه علمی بررسی می‌کنیم به اسم علم احتمالات.

به کمک این علم می‌تونیم به این سوال که «چقدر مطمئنیم که یه اتفاق رخ میده یا نه؟» با تعریف احتمال اون رخداد جواب بدیم.

همونطور که شما هم می‌دونین احتمال یه رخداد رو با یه عدد بین صفر و یک نشون میدیم که هر چی این عدد به یک نزدیک‌تر بشه یعنی شانس رخدادش بیشتره.

اما برای اینکه بتونیم پیش‌بینی درست و دقیقی از یه رخداد داشته باشیم، باید تمام حالات ممکن اونو بتونیم بدون اشتباه محاسبه کنیم که این کار به کمک روش‌هایی انجام میشه به اسم شمارش بدون شمردن (یعنی می‌شمریم بدون اینکه بشمریم!!).

شمارش بدون شمردن یعنی به کمک فرمول، بدون اینکه حالت‌ها رو بنویسیم تعداد اونا رو بدست میاریم.

نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

این دو بخش رو هر چند در کلاس هشتم و نهم باهاشون آشنا شدیم ولی همیشه تقریباً مفاهیم جدید در نظر گرفت.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

این بخش‌ها رو بخش‌های ایزوله (تنها) میگن، یعنی با هیچ بخش دیگه‌ای مرتبط نیستن، اما دقت داشته باشین همه طراحا سعی‌شون اینه یه سوال طراحی کنن که هر جوری که شده این بخشو با قسمتی دیگه ترکیب کنن.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	نوبت اول ۱۴۰۲	نوبت دوم ۱۴۰۲	نوبت اول ۱۴۰۳	نوبت دوم ۱۴۰۳
تعداد سوال	۴	۴	۴	۴	۴	۵
مباحث مطرح شده در سوال	ترکیب جایگشت دوری احتمال مقدماتی احتمال شرطی	ترکیب احتمال شرطی میان و میانگین انحراف معیار	احتمال مقدماتی احتمال شرطی احتمال کل ضریب تغییرات	جایگشت احتمال مقدماتی احتمال کل میانگین و انحراف معیار	چارک‌ها جایگشت احتمال مقدماتی احتمال کل	میانگین انحراف معیار ترکیب احتمال مقدماتی احتمال مستقل

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنیم که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ❀

حسین شفیعزاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



۱- چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز وجود دارد؟

- ۱۶۲ (۱) ۱۵۶ (۲) ۱۳۶ (۳) ۱۲۰ (۴)

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

اگر یکان عدد ۰ باشد:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{500}$$

به جز یکان و دهگان

اگر یکان عدد ۵ باشد:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{500}$$

به جز یکان و صدگان

$$72 + 64 = 136$$

بنابراین تعداد این اعداد برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۲- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ چند زیرمجموعه حداقل با دو عضو دارد که اختلاف بزرگترین عضو و کوچکترین عضو آن برابر ۱۰ است؟

- ۲۱۰ (۱) ۲۱۱ (۲) 5×2^9 (۳) 5×2^8 (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

حالت‌های ممکن به صورت زیر هستند که کوچکترین عضو و بزرگترین عضو را مشخص کرده‌ایم و اعضا را به ترتیب صعودی در نظر گرفته‌ایم.

$$A_1 = \{4, -, -, -, -, -, -, -, -, 14\}$$

$$A_2 = \{3, -, -, -, -, -, -, -, -, 13\}$$

$$A_3 = \{2, -, -, -, -, -, -, -, -, 12\}$$

$$A_4 = \{1, -, -, -, -, -, -, -, -, 11\}$$

در هر مورد، ۹ عضو می‌تواند بین کوچکترین عضو و بزرگترین عضو قرار بگیرد. هر کدام از این اعضا می‌توانند در مجموعه موردنظر بیایند یا نه. پس هر

عضو دو حالت و در کل 2^9 حالت وجود دارد، پس هر کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_4 می‌توانند به 2^9 حالت تشکیل شوند و در کل $4 \times 2^9 = 2^{11}$ مجموعه با

ویژگی موردنظر وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۳- دامنه تابع f مجموعه $\{2, 3, 4\}$ و برد آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 20\}$ است و برای هر x از دامنه f نابرابری $f(x) > x^2$ برقرار است.

چند تابع با این شرایط وجود دارد؟

- ۷۰۴ (۱) ۷۴۰ (۲) ۸۲۰ (۳) ۸۲۴ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

این تابع به صورت $f = \{(2, a), (3, b), (4, c)\}$ است که در آن:

$$a > 4 \Rightarrow a \in \{5, 6, \dots, 20\}$$

$$b > 9 \Rightarrow b \in \{10, 11, \dots, 20\}$$

$$c > 16 \Rightarrow c \in \{17, 18, 19, 20\}$$

بنابراین a می‌تواند ۱۶ حالت، b می‌تواند ۱۱ حالت و c می‌تواند ۴ حالت داشته باشد.

پس تعداد توابع موردنظر برابر است با:

$$16 \times 11 \times 4 = 704$$

گروه آموزشی ماز

۴- دانش آموز کلاس اول و ۶ دانش آموز کلاس سوم در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. در چند حالت هیچ دو دانش آموز کلاس اول کنار هم نیستند؟

- ۷! × ۶۰ (۱) ۷! × ۱۲۰ (۲) ۶! × ۱۲۰ (۳) ۶! × ۶۰ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۷)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا کلاس سومی‌ها را می‌نشانیم و جواب ۶! است. سپس ۴ کلاس اولی را در بین آن‌ها جا می‌دهیم و داریم:

$$6! \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 7! \times 120$$

گروه آموزشی ماز



۵- چند عدد سه رقمی بخش پذیر بر ۳ وجود دارد که رقم‌های آن عضو مجموعه $\{2, 4, 6, 7\}$ باشند؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۴

اگر رقم‌های عدد مورد نظر متمایز باشند، باید یکی از گروه‌های زیر باشند:

$$\{2, 4, 6\}, \{2, 6, 7\}$$

با هر کدام از گروه‌ها، ۳! عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموعاً ۱۲ عدد می‌شود.

اگر عدد مورد نظر دو رقم یکسان داشته باشد باید رقم‌ها یکی از گروه‌های زیر باشند:

$$\{4, 4, 7\}, \{4, 7, 7\}$$

با رقم‌های هر گروه ۳ عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموعاً ۶ عدد می‌شود.

اگر عدد مورد نظر سه رقم یکسان داشته باشد حتماً بر ۳ بخش پذیر می‌شود که تعداد این اعداد ۴ تا است.

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با:

$$12 + 6 + 4 = 22$$

گروه آموزشی ماز

۶- در چند جایگشت از حروف A, B, C, D, E, F, A, B, C, B, A کنار یکدیگر و قبل از حرف F قرار دارند؟

۱۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۶۰ (۲)

۲۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد جایگشت‌هایی که حرف A و B کنار یکدیگر قرار دارند برابر $2 \times 5!$ است. در نیمی از این جایگشت‌ها بسته A و B قبل از F قرار دارد و در نیمی دیگر بعد از آن قرار دارد، بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر برابر ۵! است.

گروه آموزشی ماز

۷- به چند طریق می‌توان سه عدد از اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را انتخاب و با هم جمع کنیم، طوری که حاصل عددی فرد شود؟

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

به دو روش می‌توان این را انجام داد.

روش اول: سه عدد فرد از بین اعداد $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{5}{3}$ است.

روش دوم: دو عدد زوج از بین اعداد $\{2, 4, 6, 8\}$ و یک عدد فرد از اعداد $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{4}{2} \binom{5}{1}$ است، بنابراین تعداد

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} = 10 + 30 = 40$$

کل انتخاب‌ها برابر است با:

گروه آموزشی ماز



۸- مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ دارای ۱۲۰ زیرمجموعه سه عضوی است، این مجموعه چند زیرمجموعه چهار عضوی دارد؟

۲۴۰ (۴)

۲۱۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۴۰ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه $2n$ عضوی برابر $\binom{2n}{3}$ است، پس:

$$\frac{(2n)!}{(2n-3)!3!} = 120 \Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 120$$

$$\Rightarrow 4n^2 - 6n^2 + 2n - 360 = 0 \Rightarrow 2n^2 - 3n^2 + n - 180 = 0$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 10n^2 + 7n^2 + n - 180 = 0 \Rightarrow 2n^2(n-5) + (7n+36)(n-5) = 0$$

$$\Rightarrow (n-5)(2n^2 + 7n + 36) = 0 \Rightarrow n = 5$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$$

بنابراین مجموعه مورد نظر ۱۰ عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است با:



تعداد حالات انتخاب ۲ شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

توجه کنید که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نمی‌باشد.



به خاطر سپردن موارد زیر در محاسبه، مفید است.

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 6, \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r} \end{cases}$$

رابطه پاسکال

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $P(n, 4) = 36C(n-1, 4)$ مقدار n چه عددی است؟

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} P(n, 4) = \frac{n!}{(n-4)!} \\ C(n-1, 4) = \frac{(n-1)!}{(n-5)!4!} \end{cases} \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 36 \times \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} \Rightarrow \frac{n}{n-4} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

$$2n = 3n - 12 \Rightarrow n = 12$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- به چند طریق می‌توان ۶ لنگه کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب کرد طوری که فقط دو جفت کفش بین آن‌ها باشد؟

۷۳۹۲ (۴)

۳۶۹۳ (۳)

۲۶۸۸ (۲)

۱۶۸۰ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دو جفت کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{8}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

اکنون دو جفت کفش را از بین ۶ جفت کفش باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم و از هر کدام از جفت‌های انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم. این کار به

$$\binom{6}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$$

حالت امکان‌پذیر است.



$$\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 28 \times 15 \times 2 \times 2 = 1680$$

بنابراین تعداد راه‌های انتخاب موردنظر برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۱- از کیسه‌ای که شامل ۳ مهره قرمز، ۴ مهره سفید و ۵ مهره آبی است. دو مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی مهره‌ها هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{17}{66}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۴) $\frac{19}{66}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۷)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد حالت‌های انتخاب ۲ شیء از ۱۲ شیء است که برابر است با: $\binom{12}{2}$

تعداد اعضای پیشامد هم‌رنگ بودن مهره‌ها برابر است با:

$$\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

هر دو آبی هر دو سفید هر دو قرمز

$$\frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3 + 6 + 10}{66} = \frac{19}{66}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۲- یک تاس را هشت بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد سومین باری که ۶ ظاهر می‌شود، در پرتاب پنجم باشد؟

- (۱) $\frac{25}{1296}$ (۲) $\frac{125}{3888}$ (۳) $\frac{5}{108}$ (۴) $\frac{125}{1944}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۷)

پاسخ: گزینه ۱

تعداد کل حالت‌های ممکن 6^8 است.

اگر بخواهیم برای بار سوم در پرتاب پنجم ۶ ظاهر شود، باید فقط دو پرتاب از پرتاب‌های اول تا چهارم ۶ آمده باشند. در پرتاب‌های ششم تا هشتم هر عددی از ۱ تا ۶ می‌تواند ظاهر شود. بنابراین تعداد حالت‌های رخ دادن پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times 1 \times 1 \times \underbrace{5 \times 5}_{\text{پرتاب پنجم}} \times 1 \times \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{پرتاب‌های ششم تا هشتم}} = \binom{4}{2} \times 5^2 \times 6^3$$

دو پرتاب ۶ آمده

بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2} \times 5^2 \times 6^3}{6^8} = \frac{6 \times 25}{6^5} = \frac{25}{1296}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A|B) = \frac{2}{3}$ و $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $P(B-A)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{3}{15}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

توجه کنید که:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$



$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

بنابراین:

احتمال شرطی

فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت، احتمال وقوع A به شرط این که B رخ داده باشد را با نماد $P(A|B)$ نشان داده و از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- احتمال قبولی فردی در امتحان ادبیات $\frac{1}{4}$ و در امتحان ریاضی $\frac{1}{6}$ است. اگر او در امتحان ادبیات قبول نشود، احتمال قبولی او در ریاضی $\frac{1}{8}$ می‌شود. چقدر احتمال دارد که او حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود؟

$\frac{13}{32}$ (۴)

$\frac{11}{32}$ (۳)

$\frac{7}{16}$ (۲)

$\frac{5}{16}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۳

اگر پیشامد قبولی فرد در امتحان ادبیات را با A و پیشامد قبولی او در ریاضی را با B نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{6}, P(B|A') = \frac{1}{8}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B \cap A')}{1 - P(A)} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{P(B \cap A')}{1 - \frac{1}{4}}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow P(B \cap A') = \frac{3}{32} \Rightarrow P(B - A) = \frac{3}{32}$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(B - A) = \frac{1}{6} - \frac{3}{32} = \frac{7}{96}$$

در نتیجه احتمال این که این فرد حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{7}{96} = \frac{11}{32}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $4 = 6P(B) + 3P(A)$ ، حداقل مقدار ممکن $P(A \cup B)$ کدام است؟

$\frac{47}{72}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{23}{36}$ (۲)

$\frac{25}{36}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۴

$$3P(A) + 6x = 4 \Rightarrow P(A) = -2x + \frac{4}{3}$$

اگر فرض کنیم $P(B) = x$ ، آن‌گاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = -2x + \frac{4}{3} + x - x(-2x + \frac{4}{3}) = 2x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$$

در این صورت:

$$2\left(\frac{7}{12}\right)^2 - \frac{7}{3}\left(\frac{7}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{47}{72}$$

بنابراین کمترین مقدار $P(A \cup B)$ به ازای $x = -\frac{3}{2 \times 2} = \frac{7}{12}$ به دست می‌آید و برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ و } P(B) = \frac{7}{12}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- احتمال ابتلای مردان یک جامعه به نوعی بیماری خاص ۴۰٪ و احتمال ابتلای زنان آن جامعه ۳۰٪ است، اگر ۶۰٪ جمعیت آن جامعه را مردان و بقیه را زنان تشکیل داده باشند و یک فرد از این جامعه انتخاب کنیم، به چه احتمالی به بیماری مبتلا می‌شود؟

۰.۵۶ (۴)

۰.۴۸ (۳)

۰.۳۶ (۲)

۰.۳۴ (۱)



(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۷)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{40}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{36}{100}$$

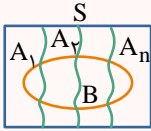
بنابر قانون احتمال کل، احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

قانون احتمال کل

فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی باشند که فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه B داریم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

البته در مسائل احتمال کل (مسائلی که چند تصادف پشت سر هم رخ داده‌اند) بهتر است مسئله را با نمودار درختی حل کنیم و استفاده از فرمول توصیه نمی‌شود، به این صورت که احتمال‌ها را در شاخه‌های متوالی در هم ضرب کردن و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



گروه آموزشی ماز

۱۷- دو جعبه داریم. در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. یک مهره از جعبه اول به تصادف برمی‌داریم و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس یک مهره از جعبه دوم به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی این مهره سفید است؟

$$\frac{13}{48} \quad (4)$$

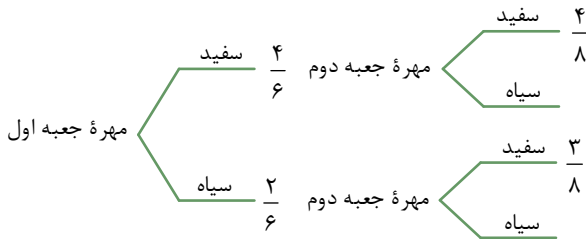
$$\frac{13}{24} \quad (3)$$

$$\frac{11}{24} \quad (2)$$

$$\frac{15}{48} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۷)

پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{8} = \frac{11}{24}$$

با توجه به نمودار درختی بالا و طبق قانون احتمال کل، احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۸- میانگین و میانه داده‌های X, ۲۴, ۲۵, ۳۷, ۱۰, ۲۶, ۳۰, ۲۳ با هم برابرند. مقدار X کدام است؟

$$26 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

$$24 \quad (2)$$

$$23 \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۳

داده‌ها را بدون در نظر گرفتن X مرتب می‌کنیم:

$$10, 23, 24, 25, 26, 30, 37$$

میانه داده‌های بالا برابر ۲۵ است و میانگین آن‌ها هم ۲۵ است:

$$\frac{10 + 23 + 24 + 25 + 26 + 30 + 37}{7} = \frac{175}{7} = 25$$

بنابراین اگر $x = 25$ ، میانه و میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند.

میانگین و میانه رو چطور پیدا کنیم؟

میانگین (\bar{x}): اگر مجموع تمام داده‌ها را به تعدادشان تقسیم کنیم، میانگین به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(به میانگین مرکز ثقل هم گفته می‌شود)



میانه (Q_2): ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها فرد بود \Leftarrow دادهٔ وسط = Q_2 = میانه

اگر تعداد داده‌ها زوج بود \Leftarrow میانگین دو دادهٔ وسط = Q_2 = میانه

گروه آموزشی ماز

۱۹- واریانس ۴ دادهٔ آماری برابر صفر است. اگر داده‌های ۲، ۴، ۸، ۱۰ را به آن‌ها اضافه کنیم، میانگین تمام داده‌ها برابر ۵ می‌شود، واریانس تمام داده‌ها کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۳

چون واریانس ۴ داده برابر صفر است، پس این چهار داده با هم برابرند. فرض کنیم این داده‌ها برابر a باشند، در این صورت:

$$\frac{4a + 10 + 8 + 4 + 2}{8} = 5 \Rightarrow \frac{a + 6}{2} = 5 \Rightarrow a + 6 = 10 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{1}{8} \left((10-5)^2 + (8-5)^2 + 5(4-5)^2 + (2-5)^2 \right) = \frac{1}{8} (25 + 9 + 5 + 9) = \frac{48}{8} = 6$$

آنچه درباره واریانس و انحراف معیار باید بدانید!

واریانس (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

و یا

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

انحراف معیار (σ): جذر واریانس است. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

اگر هر یک از مقادیر CV، σ و σ^2 صفر باشد یعنی همه آن‌ها صفر هستند و این یعنی تمام داده‌ها با هم برابرند.

گروه آموزشی ماز

۲۰- ضریب تغییرات داده‌های ۲، ۵، ۹، ۴m برابر $\frac{\sqrt{70}}{14}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$\frac{152}{37}$ (۴)

$\frac{81}{37}$ (۳)

$\frac{81}{35}$ (۲)

$\frac{138}{35}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۷)

پاسخ: گزینه ۴

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 9 + 4m}{4} = 4 + m$$

توجه کنید که:

$$\sigma^2 = \frac{(2-4-m)^2 + (5-4-m)^2 + (9-4-m)^2 + (4m-4-m)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} (m^2 + 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + 25 - 10m + m^2 + 9m^2 + 16 - 24m) = \frac{1}{4} (12m^2 - 32m + 46) = 3m^2 - 8m + \frac{23}{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt{70}}{14} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 70\bar{x}^2 = 196\sigma^2$$

بنابراین:

$$\frac{70}{35} (m+4)^2 = \frac{196}{98} (3m^2 - 8m + \frac{23}{2})$$

$$\Rightarrow 35m^2 + 35 \times 8m + 35 \times 16 = 3 \times 98m^2 - 8 \times 98m + 49 \times 23$$

$$\Rightarrow 7(42-5)m^2 - 8(98+35)m + 49 \times 23 - 35 \times 16 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای m برابر $\frac{152}{37} = \frac{8 \times 19}{7 \times 37}$ است.

گروه آموزشی ماز